7. Συνεκτικοί Μετρικοί Χώροι

Άσκηση 1.

(i) Εξετάστε αποκλειστικά με χρήση του ορισμού, αν τα σύνολα: $A = \{0, 1\}$, $B = \mathbb{Z}$, $\Gamma = \mathbb{Q}$, $\Delta = \mathbb{N} \cup [0, 1]$, $\mathrm{E} = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ είναι συνεκτικά στον $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

(ii) Εξετάστε αν τα σύνολα $A = \{(x, cx) : x \in \mathbb{R}\}$ με $c \in \mathbb{R}$ και $B = ([0, 1] \times [0, 1]) \cup \{(2, 1)\}$ είναι συνεκτικά στον $(\mathbb{R}^2, d_2)$, όπου d_2 η ευκλείδεια μετρική.

(iii) Αν A είναι ένα αστερόμορφο σύνολο (δηλαδή, υπάρχει κάποιο $a \in A$ ώστε για κάθε $x \in A$ το ευθύγραμμο τμήμα $[a, x]$ να περιέχεται στο A) να δείξετε ότι A συνεκτικό.

(iv) Εξετάστε ποια από τα σύνολα:

(α) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$

(β) $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

(γ) $C = \{(x, y) : x \in [1, 2],\ y > 5\}$

είναι κυρτά και ποια αστερόμορφα.

Άσκηση 2.
Έστω μετρικός χώρος (X, d) και συνεκτικά $A, B \subset X$. Να δείξετε ότι τα σύνολα $A \cap B$ και $A \cup B$ δεν είναι εν γένει συνεκτικά. Αν $A \cap B$ συνεκτικό, τότε A, B συνεκτικά; Αν $A \cup B$ συνεκτικό, τότε A, B συνεκτικά;

Άσκηση 3.

(i) Αν A_1, A_2, A_3 είναι συνεκτικά υποσύνολα ενός τυχαίου μετρικού χώρου (X, d) τέτοια, ώστε $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ και $A_1 \cap A_3 \neq \emptyset$, να αποδείξετε ότι το $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X.

(ii) Αν $(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων ενός τυχαίου μετρικού χώρου (X, d) τέτοια, ώστε για κάποιο $i_0 \in I$ να ισχύει $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$, για κάθε $i \in I$, να αποδείξετε ότι το $\bigcup_{i \in I} A_i$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του X.

Άσκηση 4.
Έστω E ένα συνεκτικό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, d) για τον οποίο υπάρχει $\{A, B\}$ ανοιχτή διαμέρισή του. Να αποδείξετε ότι είτε $E \subset A$, είτε $E \subset B$.

Άσκηση 5.
Να αποδείξετε ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα ενός μετρικού χώρου (X, d) είναι κλειστό υποσύνολο του. Είναι κάθε συνεκτική συνιστώσα ανοιχτό υποσύνολο του X; Αποδείξτε ότι αν ένας μετρικός χώρος έχει πεπερασμένες το πλήθος συνεκτικές συνιστώσες τότε καθεμία από αυτές είναι ανοιχτό υποσύνολό του. Τέλος, να βρεθούν οι συνεκτικές συνιστώσες των μετρικών χώρων $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{Z}, |\cdot|_{\mathbb{Z}})$ και $(A = \{0\} \cup (2, 3] \cup (4, 5), |\cdot|_A)$ και να αποφανθείτε αν το σύνολο $(2, 3)$ είναι συνεκτική συνιστώσα του A.

Άσκηση 6.
Να βρείτε ένα υποσύνολο A του $(\mathbb{R}^2, d_2)$ έτσι ώστε:

(i) A να είναι συνεκτικό με $\operatorname{diam}(A)$ ίση με τον αριθμό μητρώου σας και με $\operatorname{diam}(A^o) = 2$.

(ii) A να είναι μη συνεκτικό με $\operatorname{diam}(A)$ ίση με τον αριθμό μητρώου σας και με $\operatorname{diam}(A^o) = 2$.

(iii) A μη συνεκτικό με $d_2((0,0), A) = 2$ και $d_2((0,0), A^o) = 5$.

(iv) A συνεκτικό με $d_2((0,0), A) = 2$ και $d_2((0,0), A^o) = 5$.

Άσκηση 7.
Να αποδείξετε ότι αν X και Y δύο ομοιομορφικοί χώροι, τότε υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των συνεκτικών συνιστωσών τους.

Άσκηση 8.
Να αποδείξετε ότι κάθε συνεκτικό υποσύνολο E ενός μετρικού χώρου (X, d) με τουλάχιστον δύο στοιχεία είναι υπεραριθμήσιμο.

Άσκηση 9.
Είναι τα σύνολα

(i) $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^k$, $k > 1$

(ii) $[a, b)$ και (a, b)

(iii) $[0, 2\pi]$ και $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

(iv) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ και $[0, 1) \cup \{2\}$

ομοιομορφικά μεταξύ τους;

Άσκηση 10.
Να αποδείξετε ότι αν (X, d) ένας μετρικός χώρος, U ένα συνεκτικό υποσύνολο του X και $f \colon U \to \mathbb{Z}$ συνεχής συνάρτηση, τότε η f είναι σταθερή, παντού στο U.

Άσκηση 11
Να δώσετε παράδειγμα

(α) ακολουθίας $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ κλειστών και συνεκτικών συνόλων του $(\mathbb{R}^2, d_2)$, όπου η τομή τους να μην είναι συνεκτικό σύνολο.

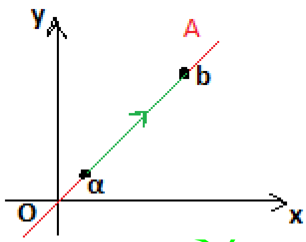
(β) φθίνουσας ακολουθίας $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συνεκτικών συνόλων του $(\mathbb{R}^2, d_2)$, όπου η τομή τους να μην είναι συνεκτικό σύνολο.

Υποδείξεις Ασκήσεων

Άσκηση 1.

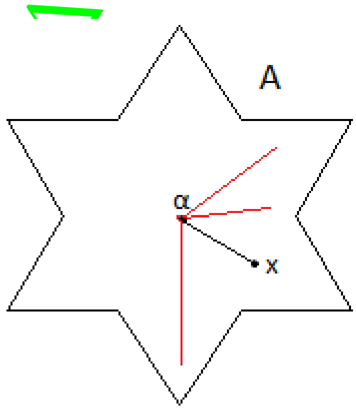
(i) Κανένα από τα εν λόγω σύνολα δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Για καθένα από τα σύνολα A, B, Γ, Δ και E, υπάρχει ανοιχτή διαμέριση $\{X, Y\}$, όπου αντίστοιχα κάθε φορά $X = \{0\}, Y = \{1\}$, $X = (-\infty, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{Z}$, $Y = (\frac{1}{2}, +\infty) \cap \mathbb{Z}$, $X = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$, $Y = (\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}$, $X = [0, 1]$, $Y = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $X = \left(-1, \frac{3}{4}\right) \cap \Delta$ και $Y = \{1\}$.

(ii) Εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε πως το A είναι οδικά συνεκτικό (και άρα συνεκτικό). Συγκεκριμένα, η συνεχής καμπύλη που κείται στο A δεν είναι άλλη από το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ δύο τυχαίων σημείων $a = (x, y)$ και $b = (z, w)$ του συνόλου A, δηλαδή, $c\colon [0, 1] \to A$ με $c(t) = (1 - t)a + tb,\ t \in [0, 1]$.



Σχηματική αναπράσταση.

(iii) Θεωρούμε την οικογένεια των συνεκτικών συνόλων $[a, x]_{x \in X}$. Εφόσον $\bigcap\limits_{x \in A} [a, x] = \{a\} \neq \emptyset$ τότε η $\bigcup\limits_{x \in A} [a, x] = A$ είναι συνεκτικό σύνολο.



Σχηματική αναπράσταση.

(iv) Για να διακρίνετε αν τα παρακάτω σύνολα είναι κυρτά ή αστερόμορφα, είναι δόκιμο να κάνετε το αντίστοιχο σχήμα του συνόλου στο επίπεδο και έπειτα να επιβεβαιώσετε μαθηματικώς τις παρακάτω απαντήσεις με βάση τον αντίστοιχο ορισμό.

(α) Είναι αστερόμορφο με κέντρο κάθε σημείο πάνω στον θετικό πραγματικό ημιάξονα, όμως δεν είναι κυρτό επειδή σημείο στο δεύτερο τεταρτημόριο δεν μπορεί να ενωθεί μέσω ενός ευθυγράμμου τμήματος το οποίο να περιέχεται στο A με σημείο στο τρίτο τεταρτημόριο.

(β) Δεν είναι αστερόμορφο (άρα ούτε και κυρτό) διότι αν ήταν τότε κάποιο σημείο του B θα μπορούσαμε να το ενώσουμε με κάθε σημείο του B μέσω ενός ευθυγράμμου τμήματος το οποίο να περιέχεται στο B πράγμα άτοπο, διότι το $0 \notin B$.

(γ) Είναι κυρτό (άρα και αστερόμορφο), γιατί κάθε δύο σημεία του μπορούν να ενωθούν μέσω ευθυγράμμου τμήματος το οποίο περιέχεται στο C.

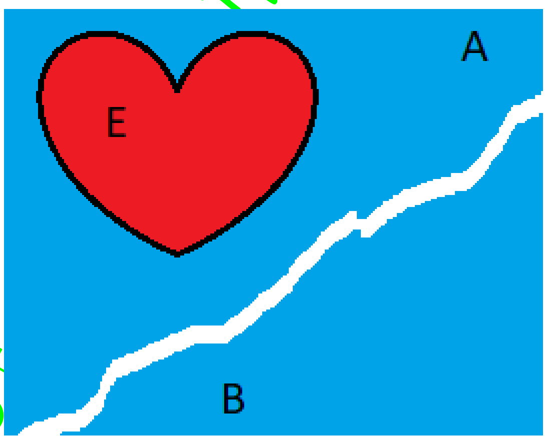
Άσκηση 2.
Αν $A = (0,1)$ και $B = (2,3)$ τότε A, B είναι συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ως διαστήματα, όμως $A \cup B$ μη συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ως μη διάστημα. Επίσης, αν $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ και $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$ τότε A, B συνεκτικά (ως οδικά συνεκτικά) υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ αλλά $A \cap B$ προφανώς μη συνεκτικό ως δισύνολο στον $\mathbb{R}^2$. Αντίστροφα για την τομή, αν $A = \{-2\} \cup [-1,1]$ και $B = [0,2] \cup \{3\}$, τότε τα A, B μη συνεκτικά αλλά $A \cap B = [0,1]$ είναι συνεκτικό ως υπδιάστημα του $\mathbb{R}$. Από την άλλη μεριά για την ένωση αν $A = [-1,1] \cup \{2\}$ και $B = \{0\} \cup [1,3]$, τότε A, B μη συνεκτικά ως μη διαστήματα, αλλά $A \cup B = [-1,3]$ συνεκτικό ως υποδιάστημα του $\mathbb{R}$.

Άσκηση 3

(i) Εφόσον A_1 και A_2 είναι συνεκτικά και ξένα από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι η ένωση $A_1 \cup A_2$ είναι συνεκτικό σύνολο. Εφόσον, $A_1 \cup A_2$ και A_3 συνεκτικά και ξένα έπεται ότι η ένωση των $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ είναι συνεκτικό σύνολο.

(ii) Το επιχείρημα που χρησιμοποιείται είναι παρόμοιο με αυτό του ζητήματος (i).

Άσκηση 4
Αρκεί να δείξουμε ότι είτε $A \cap E = \emptyset$, είτε $B \cap E = \emptyset$.



Σχηματική αναπράσταση αποτελέσματος.

Υποθέτουμε ότι $A \cap E \neq \emptyset$ και $B \cap E \neq \emptyset$. Όμως τότε η οικογένεια $\{A \cap E, B \cap E\}$ είναι μία ανοιχτή διαμέριση του E (γιατί;) το οποίο είναι αδύνατον αφού το E είναι συνεκτικό σύνολο.

Άσκηση 5
Έστω A συνεκτική συνιστώσα και θα αποδείξουμε ότι $A = \bar{A}$. Εφόσον, A συνεκτικό από τη θεωρία το $\bar{A}$ είναι συνεκτικό. Επίσης, $A \subset \bar{A}$. Όμως, $\bar{A}$ είναι maximal συνεκτικό υποσύνολο του X. Οπότε, $A = \bar{A}$. Ωστόσο, κάθε συνεκτική συνιστώσα δεν είναι πάντα ανοιχτό σύνολο ενός τυχαίου μετρικού χώρου. Για παράδειγμα στον μετρικό υπόχωρο $\mathbb{Q}$ του $\mathbb{R}$ με την ευκλείδεια μετρική οι συνεκτικές συνιστώσες του $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ είναι τα μονοσύνολα $\{q_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ τα οποία δεν

είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{Q}$. Έστω τώρα ότι οι συνεκτικές συνιστώσες ενός μετρικού χώρου (X,d) είναι πεπερασμένες το πλήθος, δηλαδή υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $C_1, \dots, C_n$ να είναι όλες οι συνεκτικές συνιστώσες του μετρικού χώρου X. Τότε καθεμία εξ αυτών είναι ανοιχτό υποσύνολο του X, επειδή για κάθε $i \in I = \{1, \dots, n\}$ είναι $C_i = X \setminus \left(\bigcup\limits_{j \in I \setminus \{i\}} C_j \right)$ και το σύνολο $\bigcup\limits_{j \in I \setminus \{i\}} C_j$ είναι κλειστό ως πεπερασμένη ένωση κλειστών. Άρα, το τυχαίο C_i είναι ανοιχτό. Το $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ έχει μία συνεκτική συνιστώσα τον εαυτό του. Το $(\mathbb{Z}, |\cdot|_{\mathbb{Z}})$ έχει ως συνεκτικές συνιστώσες όλα τα μονοσύνολα $\{k\}, k \in \mathbb{Z}$. Το $(A, |\cdot|_A)$ έχει συνεκτικές συνιστώσες τα σύνολα $\{0\}$, $(2,3]$ και $(4,5)$. Τέλος, το $(2,3)$ όχι συνεκτική συνιστώσα γιατί παρόλο που είναι συνεκτικό δεν είναι maximal συνεκτικό υποσύνολο του A.

Άσκηση 6

(i) $A = B_{d_2}((0,0),2) \cup ([0, \text{Αρ. Μητρ.} - 1] \times \{0\})$

(ii) $A = B_{d_2}((0,0),2) \cup \{(\text{Αρ. Μητρ.} - 1, 0)\}$

(iii) $A = B_{d_2}((6,0),1) \cup \{(2,0)\}$

(iv) $A = B_{d_2}((6,0),1) \cup \{[2,6] \times \{0\})\}$

Εξηγήστε γιατι επιλέξαμε τα παραπάνω παραδείγματα και να κάνετε γεωμετρική αναπαράσταση αυτών.

Άσκηση 7

Ας είναι $f\colon X \to Y$ ένας ομοιομορφισμός και A μια συνεκτική συνιστώσα του X. Αρχικά το $f(A)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του Y γιατί η συνεκτικότητα είναι τοπολογική ιδιότητα. Μένει να αποδείξουμε πως το $f(A)$ είναι maximal συνεκτικό υποσύνολο του Y. Έστω λοιπόν ένα C συνεκτικό υποσύνολο του Y τέτοιο, ώστε $f(A) \subset C$. Τότε, επειδή η f^{-1} είναι συνεχής το $f^{-1}(C)$ είναι συνεκτικό και μάλιστα $A \subset f^{-1}(C)$. Τότς, όμως επειδή το σύνολο A είναι συνεκτική συνιστώσα παίρνουμε $f^{-1}(C) = A$, δηλαδή $C = f(A)$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι αν B είναι συνεκτική συνιστώσα του Y, το σύνολο $f^{-1}(B)$ είναι συνεκτική συνιστώσα του X.

Άσκηση 8

Έστω a, b δύο στοιχεία του συνόλου E με $a \neq b$ και θέτουμε $\lambda = (a,b) > 0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f\colon E \to \mathbb{R}$ με $f(x) = d(a,x), x \in E$ η οποία είναι συνεχής (ως Lipschitz). Επειδή το E είναι συνεκτικό συνάγουμε ότι το $f(E)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Άρα, το $f(E)$ είναι διάστημα και επομένως, επειδή τα $f(0) = 0$ και $f(b) = \lambda$ είναι στοιχεία του $f(E)$ προκύπτει ότι $[0, \lambda] \subset f(E)$. Συνεπώς, έχουμε

$$[0, \lambda] \precsim f(E) \precsim E$$

και προκύπτει το αποδεικτέο.

Άσκηση 9

(i) Οι χώροι $\mathbb{R}$ και $\mathbb{R}^k$ για $k > 1$ δεν είναι ομοιομορφικοί μεταξύ τους. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ ομοιομορφισμός, δηλ. $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^k$. Τότε, $\mathbb{R} \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^k \setminus \{f(p)\}$, για κάποιο $p \in \mathbb{R}$, το οποίο είναι αδύνατο, γιατί από τη μία ο $\mathbb{R}\{p\}$ είναι μη συνεκτικός αλλά από την άλλη ο $\mathbb{R}^k \setminus \{f(p)\}, k > 1$ είναι συνεκτικός (ως οδικά συνεκτικός).

(ii) Τα σύνολα $[a,b)$ και (a,b) δεν είναι ομοιομορφικά. Ας υποθέσουμε πως υπάρχει μια συνάρτηση $f\colon [a,b) \to (a,b)$ η οποία είναι ομοιομορφισμός, δηλ. $[a,b) \cong (a,b)$. Τότε, $[a,b) \setminus \{a\} = (a,b) \cong (a,b) \setminus \{f(a)\}$, όπου $f(a) \in (a,b)$, το οποίο είναι αδύνατο, γιατί από τη μία το σύνολο (a,b) είναι συνεκτικό, ενώ από την άλλη το σύνολο $(a, f(a)) \cup (f(a), b)$ όχι συνεκτικό.

(iii) Τα σύνολα $[0,2\pi]$ και S^1 δεν είναι ομοιομορφικά. Αν υποθέσουμε πως υπάρχει συνάρτηση $f\colon [0,2\pi] \to S^1$ ομοιομορφισμός, δηλ. $[0,2\pi] \cong S^1$, τότε $[0,\pi) \cup (\pi, 2\pi] \cong S^1 \setminus \{f(\pi)\}$, το οποίο είναι αδύνατο, γιατί το $S^1 \setminus \{f(\pi)\}$ είναι συνεκτικό (ως οδικά συνεκτικό), ενώ το $[0,\pi) \cup (\pi, 2\pi]$ δεν είναι συνεκτικό.

(iv) Με όμοιο επιχείρημα συνεκτικότητας μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα δύο σύνολα δεν είναι ομοιομορφικά. Αρκεί να εξαιρέσουμε το σημείο 2 από το δεύτερο σύνολο, όποτε και πάλι κατόπιν ομοιομορφισμού δεν διατηρείται η συνεκτικότητα (η οποία είναι τοπολογική ιδιότητα) και αυτό είναι αδύνατο (βέβαια μπορεί κανείς να το αποδείξει και αλλιώς παρατηρώντας ότι το ένα σύνολο είναι αριθμήσιμο, ενώ το άλλο υπεραριθμήσιμο).

Άσκηση 10

Εφόσον U συνεκτικό υποσύνολο του X και f συνεχής, το σύνολο $f(U)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο ου $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, άρα είναι διάστημα. Όμως, επειδή το σύνολο $f(U)$ περιέχει μονάχα ακέραιους αναγκαστικά το $f(U)$ είναι μονοσύνολο.

Άσκηση 11

(α) $A_n = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x \in (-1,1),\ y \in (-n,n)\}, n \in \mathbb{N}$ (εξηγήστε).

(β) $A_n = B_n \cup C_n \cup D_n, n \in \mathbb{N}$, όπου $B_n = \left[-1, -\frac{1}{n}\right] \times \{0\}$, $C_n = B^+_{d_2}((0,0), \frac{1}{n}) \setminus (0,0)$ και $D_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right] \times \{0\}$ (εξηγήστε). Το σύνολο $B^+_{d_2}((0,0), \frac{1}{n})$ είναι το άνω ημισφαίριο της ανοιχτής μπάλας με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\frac{1}{n}$.